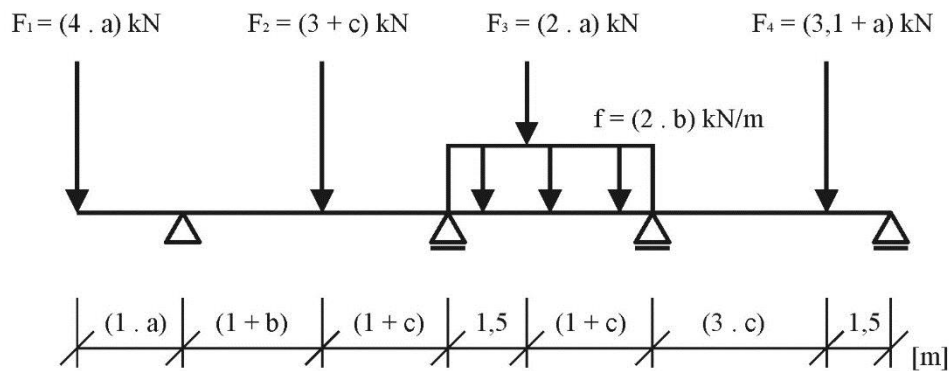
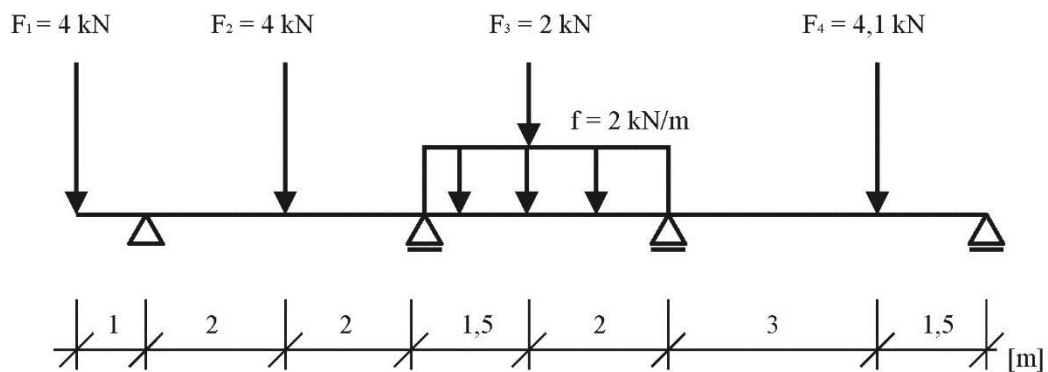


**Př. 3. Na zadaném spojitém nosníku určete průběh vnitřních sil pomocí třímomentové (Clapeyronovy) rovnice.**



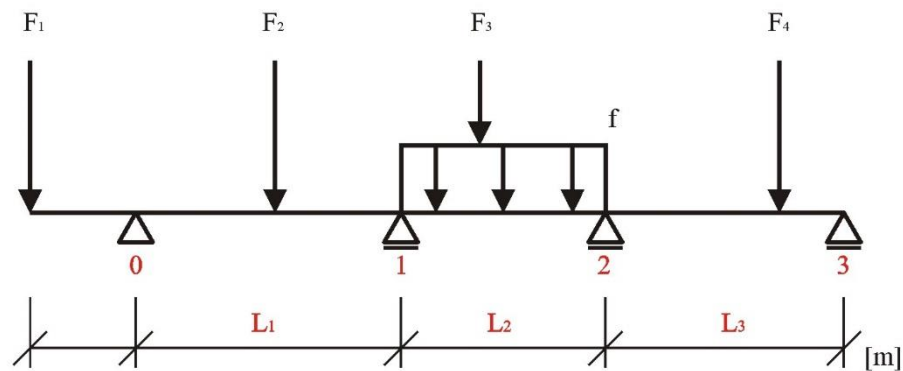
Konstrukce s koeficienty **a = 1,0**; **b = 1,0** a **c = 1,0**:



Postup:

- Stanovení soustavy rovnic a výpočet potřebných zatěžovacích členů
- Výpočet nadpodporových momentů ze soustavy rovnic
- Stanovení posouvajících sil na vyjmutých prostých nosnících
- Stanovení posouvajících sil na spojitém nosníku
- Odečtení velikosti reakcí z posouvajících sil.
- Stanovení průběhu momentů

Označení konstrukce pro sestavení soustavy rovnic:

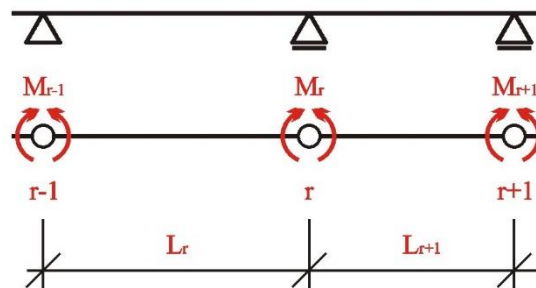


$$L_1 = 2 + 2 = 4 \text{ m}$$

$$L_2 = 1,5 + 2 = 3,5 \text{ m}$$

$$L_3 = 3 + 1,5 = 4,5 \text{ m}$$

Třímomentová rovnice:



$$M_{r-1} \cdot L_r + 2M_r \cdot (L_r + L_{r+1}) + M_{r+1} \cdot L_{r+1} + \frac{z_r}{L_r} + \frac{z'_{r+1}}{L_{r+1}} = 0$$

Sestavení soustavy rovnic:

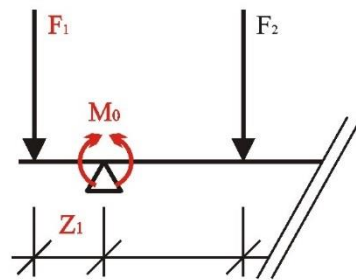
$$M_0 \cdot L_1 + 2M_1 \cdot (L_1 + L_2) + M_2 \cdot L_2 + \frac{z_1}{L_1} + \frac{z'_2}{L_2} = 0 \quad (1)$$

$$M_1 \cdot L_2 + 2M_2 \cdot (L_2 + L_3) + M_3 \cdot L_3 + \frac{z_2}{L_2} + \frac{z'_3}{L_3} = 0 \quad (2)$$

Určení neznámých:

Momenty v krajních podporách lze jednoduše dopočítat. V kloubovém uložení bez konzoly je moment nulový, jelikož nic nebrání volnému natočení průřezu. V kloubovém uložení s konzolou bude působit moment vyvolaný silou  $F_1$ . Zatěžovací členy je možné vyčíslit a rozpětí polí známe. Neznámými tedy budou jen momenty  $M_1$  a  $M_2$ .

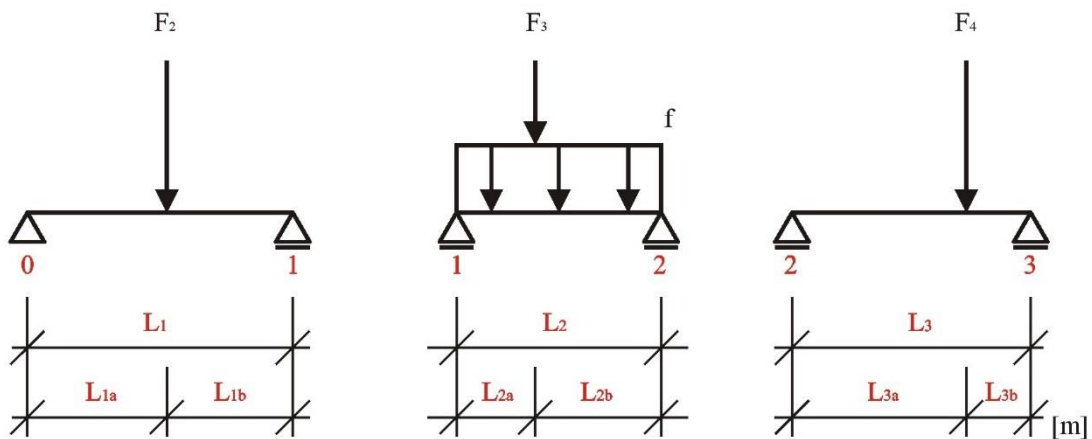
Moment v krajních podporách:



$$M_0 = -F_1 \cdot z_1 = -4 \cdot 1 = -4 \text{ kNm}$$

$$M_3 = 0 \text{ kNm}$$

Zatěžovací členy jednotlivých polí:



$$z_1 = F_2 \cdot L_{1a} \cdot L_{1b} \cdot (L_1 + L_{1a}) = 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (4 + 2) = 96,00 \text{ kNm}^3$$

$$z_2 = \frac{1}{4} \cdot f \cdot L_2^4 + F_3 \cdot L_{2a} \cdot L_{2b} \cdot (L_2 + L_{2a}) = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 3,5^4 + 2 \cdot 1,5 \cdot 2 \cdot (3,5 + 1,5) = 105,03 \text{ kNm}^3$$

$$z'_2 = \frac{1}{4} \cdot f \cdot L_2^4 + F_3 \cdot L_{2a} \cdot L_{2b} \cdot (L_2 + L_{2b}) = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 3,5^4 + 2 \cdot 1,5 \cdot 2 \cdot (3,5 + 2) = 108,03 \text{ kNm}^3$$

$$z'_3 = F_4 \cdot L_{3a} \cdot L_{3b} \cdot (L_3 + L_{3b}) = 4,1 \cdot 3 \cdot 1,5 \cdot (4,5 + 1,5) = 110,70 \text{ kNm}^3$$

Dosazení do soustavy rovnic:

$$-4 \cdot 4 + 2M_1 \cdot (4 + 3,5) + M_2 \cdot 3,5 + \frac{96,00}{4} + \frac{108,03}{3,5} = 0 \quad (1)$$

$$M_1 \cdot 3,5 + 2M_2 \cdot (3,5 + 4,5) + 0 \cdot 4,5 + \frac{105,03}{3,5} + \frac{110,70}{4,5} = 0 \quad (2)$$

---

$$-16,00 + M_1 \cdot 15,00 + M_2 \cdot 3,5 + 24,00 + 30,87 = 0 \quad (1)$$

$$M_1 \cdot 3,5 + M_2 \cdot 16,00 + 0 + 30,01 + 24,60 = 0 \quad (2)$$

---

$$M_1 \cdot 15,00 + M_2 \cdot 3,5 + 38,87 = 0 \quad (1)$$

$$M_1 \cdot 3,5 + M_2 \cdot 16,00 + 54,61 = 0 \quad (2)$$

---

$$M_1 \cdot 15,00 + M_2 \cdot 3,5 + 38,87 = 0 \quad (1)$$

$$M_1 \cdot 15,00 + M_2 \cdot 68,57 + 234,04 = 0 \quad (2)$$

---

$$M_1 \cdot 0 + M_2 \cdot (-65,07) + (-195,17) = 0 \quad (1) - (2)$$

$$M_2 = \frac{195,17}{-65,07} = -3,00 \text{ kNm}$$

---

$$M_1 \cdot 15,00 + (-3,00) \cdot 3,5 + 38,87 = 0 \quad (1)$$

$$M_1 = \frac{-28,37}{15,00} = -1,89 \text{ kNm} \quad (1)$$

Výpočet posouvajících sil:

Konstrukce se rozdělí na tzv. „prosté vyjmuté nosníky“. Posouvající síla na spojitém nosníku je rovna posouvající síle  $Q^0$  na prostém vyjmutém nosníku zvětšená o doplněk posouvajících sil  $\Delta Q$ , který se vypočte jako rozdíl momentů působících na daném poli vydělený délkou pole. Doplněk posouvajících sil je po celém vyjmutém nosníku konstantní.

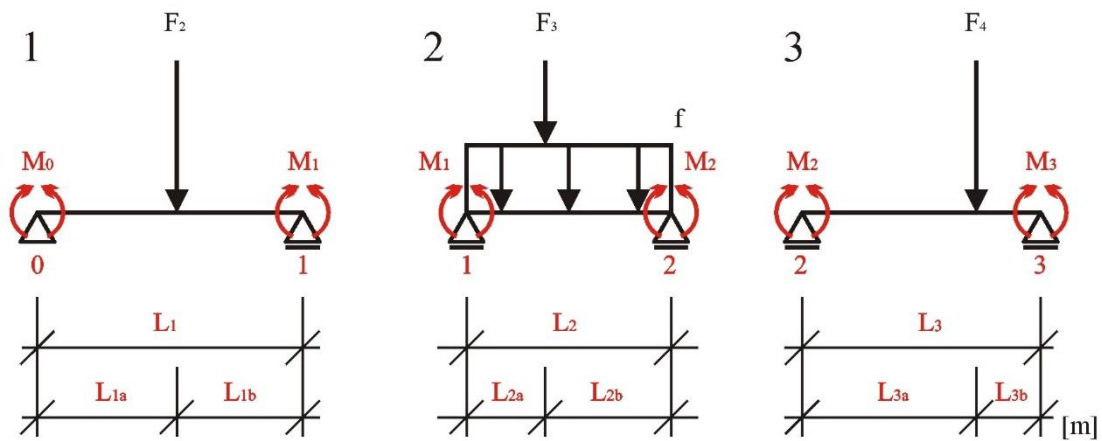
$$\Delta Q = \frac{M_p - M_L}{L}$$

Kde:  $\Delta Q$  je doplněk posouvajících sil

$M_p$  je moment v pravé podpoře daného pole

$M_L$  je moment v levé podpoře daného pole

$L$  je rozpětí

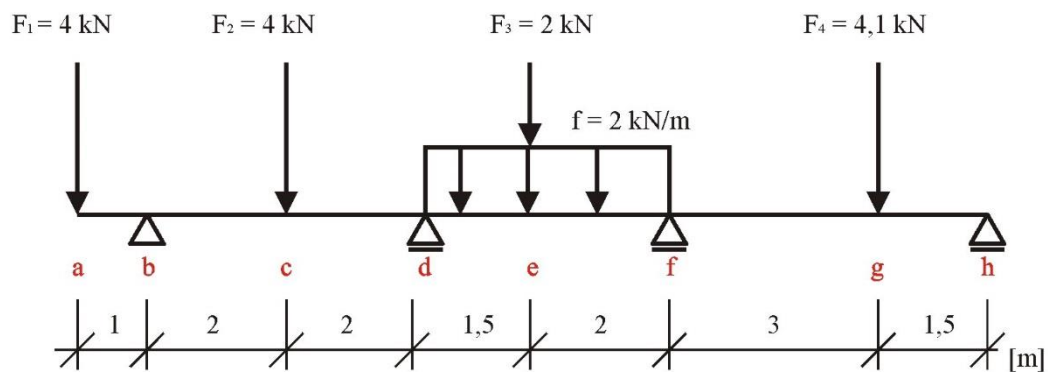


$$\Delta Q_1 = \frac{-1,89 - (-4)}{4} = 0,53 \text{ kN}$$

$$\Delta Q_2 = \frac{-3 - (-1,89)}{3,5} = -0,32 \text{ kN}$$

$$\Delta Q_3 = \frac{0 - (-3)}{4,5} = 0,67 \text{ kN}$$

Posouvající síly na spojitém nosníku:



$$Q_{aL} = 0 \text{ kN}$$

$$Q_{ap} = -F_1 = -4 \text{ kN}$$

$$Q_{bL} = Q_{ap} = -4 \text{ kN}$$

$$Q_{bp} = R_{b1}^0 + \Delta Q_1 = 2 + 0,53 = 2,53 \text{ kN}$$

$$Q_{cL} = Q_{bp} = 2,53 \text{ kN}$$

$$Q_{cp} = Q_{cL} - F_2 = 2,53 - 4 = -1,47 \text{ kN}$$

$$Q_{dL} = Q_{cp} = -1,47 \text{ kN}$$

$$Q_{dp} = R_{d2}^0 + \Delta Q_2 = 4,64 - 0,32 = 4,32 \text{ kN}$$

$$Q_{eL} = Q_{dp} - f \cdot L_{2a} = 4,32 - 2 \cdot 1,5 = 1,32 \text{ kN}$$

$$Q_{ep} = Q_{eL} - F_3 = 1,32 - 2 = -0,68 \text{ kN}$$

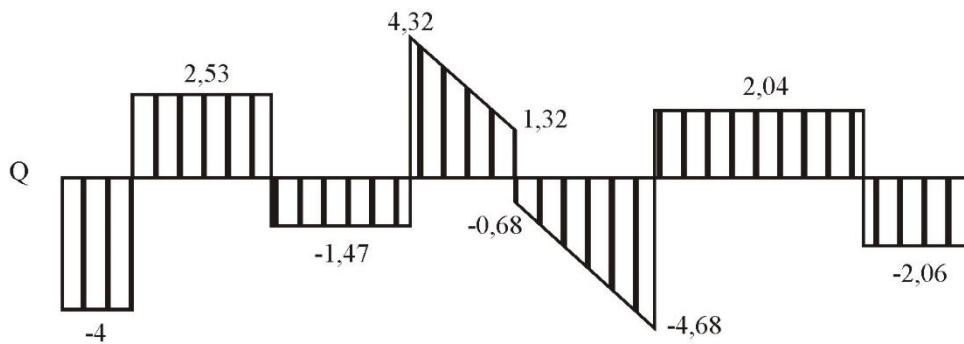
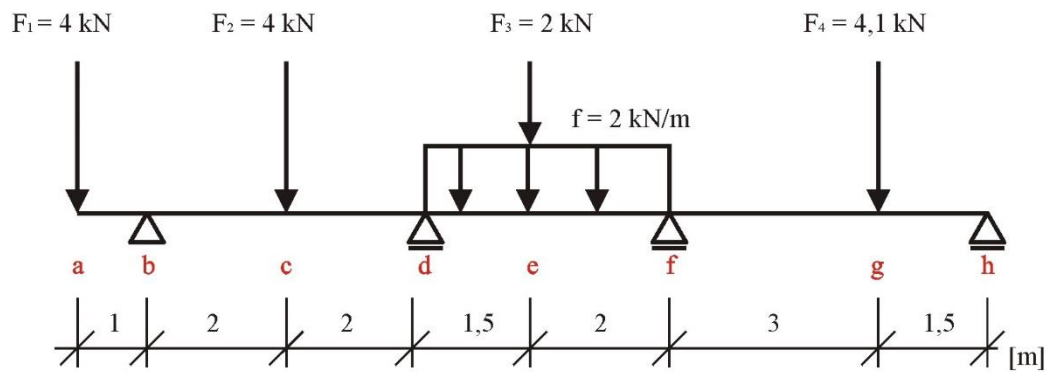
$$Q_{fL} = Q_{ep} - f \cdot L_{2b} = -0,68 - 2 \cdot 2 = -4,68 \text{ kN}$$

$$Q_{fp} = R_{f3}^0 + \Delta Q_3 = 1,37 + 0,67 = 2,04 \text{ kN}$$

$$Q_{gL} = Q_{fp} = 2,04 \text{ kN}$$

$$Q_{gp} = Q_{gL} - F_4 = 2,04 - 4,1 = -2,06 \text{ kN}$$

$$Q_{hL} = Q_{gp} = -2,06 \text{ kN}$$



Určení reakcí na spojitém nosníku:

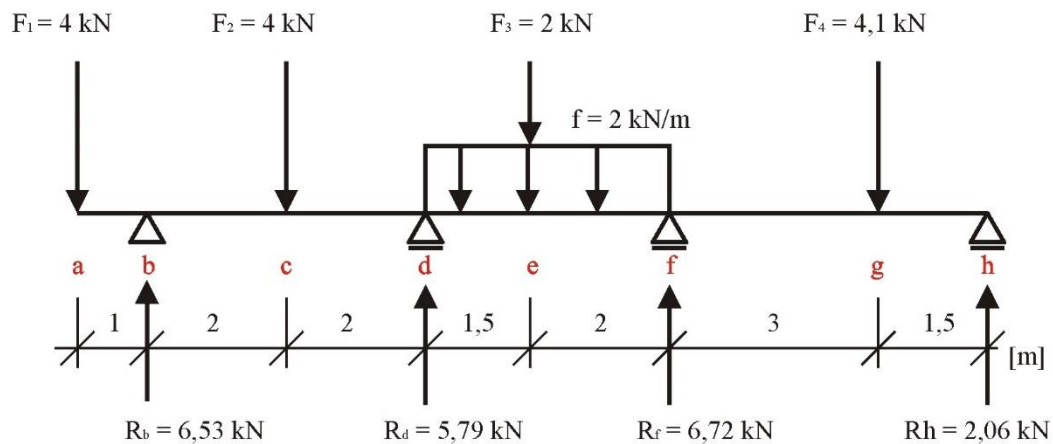
$$R_b = |Q_{bL}| + |Q_{bp}| = 4 + 2,53 = 6,53 \text{ kN}$$

$$R_d = |Q_{dL}| + |Q_{dp}| = 1,47 + 4,32 = 5,79 \text{ kN}$$

$$R_f = |Q_{fL}| + |Q_{fp}| = 4,68 + 2,04 = 6,72 \text{ kN}$$

$$R_h = |Q_{hL}| + |Q_{hp}| = 2,06 + 0 = 2,06 \text{ kN}$$

Výpočet ohybového momentu:



K výpočtu ohybového momentu na spojitém nosníku je možné využít stejný postup jako u výpočtu posouvajících sil. Moment spočítaný na vyjmutých prostých nosnících se rozšíří o doplněk ohybového momentu. Doplněk momentu není konstantní a je nutné ho počítat v každém počítaném průřezu:

$$\Delta Q = \frac{M_p \cdot x + M_L \cdot (L - x)}{L}$$

Kde:  $\Delta Q$  je doplněk posouvajících sil

$M_p$  je moment v pravé podpoře daného pole

$M_L$  je moment v levé podpoře daného pole

$L$  je rozpětí

$x$  je vzdálenost kontrolovaného průřezu od levé podpory

Výpočet momentu pomocí vyjmutých nosníků a doplňků je velmi obsáhlý. Moment lze spočítat standardně součtem momentových účinků všech vnějších sil působících na konstrukci před vyšetřovaným průřezem. Pomocí posouvajících sil byly zjištěny reakce a nic nebrání ve využití tohoto postupu a tím i ušetření velkého množství počítání.

$$M_a = -F_1 \cdot 0 = -4 \cdot 0 = 0 \text{ kNm}$$

$$M_b = -F_1 \cdot 1 = -4 \cdot 1 = -4 \text{ kNm}$$

$$M_c = -F_1 \cdot 3 + R_b \cdot 2 = -4 \cdot 3 + 6,53 \cdot 2 = 1,06 \text{ kNm}$$

$$M_d = -F_1 \cdot 5 + R_b \cdot 4 - F_2 \cdot 2 = -4 \cdot 5 + 6,53 \cdot 4 - 4 \cdot 2 = -1,88 \text{ kNm}$$

$$M_e = -F_1 \cdot 6,5 + R_b \cdot 5,5 - F_2 \cdot 3,5 + R_d \cdot 1,5 - f \cdot \frac{1,5^2}{2} = -4 \cdot 6,5 + 6,53 \cdot 5,5 - 4 \cdot 3,5 + 5,79 \cdot 1,5 - 2 \cdot \frac{1,5^2}{2} = 2,35 \text{ kNm}$$

Tímto způsobem by bylo možné dopočítat hodnoty až na konec nosníku, ale rovnice se zvětšuje, výpočet se prodlužuje a možnost chyby také roste. Proto je vhodné zbylé hodnoty dopočítat z druhé strany nosníku.

$$M_h = R_h \cdot 0 = 2,06 \cdot 0 = 0 \text{ kNm}$$

$$M_g = R_h \cdot 1,5 = 2,06 \cdot 1,5 = 3,09 \text{ kNm}$$

$$M_f = R_h \cdot 4,5 - F_4 \cdot 3 = 2,06 \cdot 4,5 - 4,1 \cdot 3 = -3,03 \text{ kNm}$$

Výsledné vnitřní síly:

